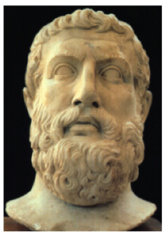
Limites de suites

Objectifs :

- Comprendre les notions de suites divergentes, convergentes
- Savoir déterminer un rang à partir duquel les termes d'une suite dépassent un certain seuil
- Savoir étudier la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux suites
- Savoir déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique
- Connaître et savoir utiliser le théorème des "gendarmes", le théorème de converges des suites croissantes majorées

Aperçu historique :

Depuis l'Antiquité, la notion de limite joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment, au xix° siècle, que les mathématiciens parvinrent à en donner une définition précise et rigoureuse. En effet, la notion de limite est étroitement liée à celle d'infini.
Au v° siècle av. JC, ZÉNON D'ELÉE *propose entre autres le paradoxe suivant : Dans le paradoxe d'Achille et de la tortue dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pied avec le lent reptile. Comme Achille était réputé être un coureur très rapide, il avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres. L'argument exposé par Zénon est que Achille ne peut rattraper la tortue car si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne peut jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse ; car pendant qu'Achille court jusqu'au point d'où a démarré la tortue, cette dernière avance, de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler l'avance de l'animal.*
En analyse moderne, le paradoxe est résolu en utilisant fondamentalement le fait qu'une série infinie de nombres strictement positifs peut converger vers un résultat fini.
L'Analyse fait d'énormes progrès au cours des xvii° et xviii° siècles.
Les mathématiciens de cette époque ont une intuition claire de la notion de limite. On trouve l'idée chez GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ*(1646-1716), dans un article dont l'objet est de donner le nombre π comme la somme suivante : $\pi = 4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right]$ etc.. Leibniz écrit : « L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre [...] que toute grandeur donnée. »*
Au cours de xix° siècle, la nécessité de définir clairement les concepts et les termes mis en œuvre se fait sentir. LOUIS-AUGUSTIN CAUCHY *(1789-1857) fait de la limite une des notions centrales de l'Analyse. Il en donne la définition suivante dans son Cours d 'Analyse de l'École Polytechnique : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres. ».*
Cependant c'est à l'allemand KARL WEIERSTRASS *(1815-1897) que l'on doit le langage très précis, plus mathématique, que nous utilisons aujourd'hui pour définir la limite d'une suite.*

			
Zénon	Leibniz	Cauchy	Weierstrass

1. Suite convergente, suite divergente

A. Trois exemples

Exemple 3.1 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = 5 - 0,8.u_n$ et $u_0 = 5$.
Calculer les premiers termes de la suite u à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer à propos des termes de cette suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Exemple 3.2 Soit v la suite définie par $v_n = f(n)$, où $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$.
Calculer les premiers termes de la suite v à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer à propos des termes de cette suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Exemple 3.3 Soit w la suite définie par $w_n = (-2)^n$.
Calculer les premiers termes de la suite v à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer à propos des termes de cette suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

B. Suite convergente

Définition 3.1 On dit qu'une suite u converge vers un réel ℓ ssi tout intervalle *ouvert* contenant ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Le réel ℓ est appelé limite de la suite u. On dit que la suite u est convergente, ce qui signifie qu'elle admet une limite finie.

Remarque 3.1 Pour montrer qu'une suite u converge vers un réel ℓ, il est suffisant de montrer que tout intervalle ouvert du type $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (où ϵ est un réel strictement positif quelconque).

Exemple 3.4 Démontrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ converge vers $\ell = 2$.

C. Suite divergente

Définition 3.2 On dit qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Définition 3.3 Une suite u divergente peut admettre une limite infinie :
- on dit que u tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A; +\infty[$ contient *tous* les termes de la suite u à partir d'un certain rang.
- on dit que u tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]-\infty; A[$ contient *tous* les termes de la suite u à partir d'un certain rang.

On écrit respectivement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

ou :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Remarque 3.2 Si une suite est divergente, elle peut soit avoir une limite infinie (voir la définition précédente), soit ne pas en avoir du tout.

Exemple 3.5 Démontrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

D. Recherche de seuil

Exemple 3.6 Pour déterminer le seuil à partir duquel une suite de limite $+\infty$ prend des valeurs au-dessus d'une certaine valeur A, on peut suivre le déroulement d'un algorithme.
L'algorithme **??** donne le seuil de dépassement d'une valeur A d'une suite définie par récurrence par :
$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Données : le premier terme a;
la fonction f;
la valeur à dépasser A;
début
    u← a ;
    On initialise l'indice $I = 0$
    tant que $u < A$ **faire**
        Calculer $u \leftarrow f(u)$;
        Calculer $I \leftarrow I + 1$;
Sorties : le seuil est I

Algorithme 2 : Recherche de seuil

2. Propriété de convergence

Dans ce paragraphe, nous allons découvrir plusieurs méthodes permettant de déterminer la limite d'une suite. En exercices, il faudra essayer de trouver la méthode la plus adaptée à chaque cas particulier !

A. Limite et comparaison

Théorème 3.1 Soient u et v deux suites numériques telles que :
- à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$;
- La suite u tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$;

Alors, la suite v tend aussi vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire** Soit A un réel quelconque. La suite u tend vers $+\infty$, donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $u_n > A$.
De plus, on sait qu'il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, on a $u_n \leqslant v_n$.
En prenant $n_0 = max(n_1; n_2)$ on a pour $n > n_0$: $A < u_n \leqslant v_n$, ce qui correspond bien à la définition d'une suite v qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

B. Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, ℓ et ℓ' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaitre sur les sommes, produits et quotients de limites de deux suites u et v.
Lorsque les cases contiennent "F.I", il s'agit d'une *forme indéterminée* : cela ne signifie pas que la suite n'a pas de limite mais qu'on ne peut pas conclure (cela dépend des cas).
Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a. Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une forme indéterminée : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

a. Limite d'une somme

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $u+v$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

b. Limite d'un produit

Si u a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$u \times v$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

c. Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite non nulle

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si v a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

d. Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite nulle

Si u a pour limite	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si v a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Les cas de formes indéterminées sont au nombre de quatre :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

Pour calculer une telle limite, il faut souvent transformer l'écriture algébrique de u_n et utiliser un théorème comme ceux étudiés dans la suite de ce chapitre.

Exemple 3.7 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^3 - 15n^2 + 3n$. Étudier la limite de la suite u lorsque n tend vers $+\infty$.

Propriété 3.1 Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ avec f une fonction polynomiale :
$f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_1 x + a_0$
Alors la limite de la suite u lorsque n tend vers $+\infty$ est la limite de $(a_p n^p)$ lorsque n tend vers $+\infty$. (On dit que sa limite est celle de son terme de plus haut degré).

Démonstration Factoriser par $a_p x^p$.

Exemple 3.8 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^5 - 6n^4 - 25n^3 - 36n^2 + 3n + 1$. On a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^5 = +\infty$

Propriété 3.2 Soit u une suite définie par $u_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + ... + b_1 n + b_0}$. La limite lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n est la limite du quotient simplifié $\frac{a_p n^p}{b_q n^q}$.
On dit que la limite de u est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré.

Exemple 3.9 Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^4 + n^2 + 1}$. On a alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$

C. Suites géométriques

Propriété 3.3 (lemme : inégalité de Bernoulli) Si a est un réel strictement positif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire** Nous allons raisonner par récurrence. Soit P_n la proposition : "Pour $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$".
Initialisation : P_0 : $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0a$, i.e. $1 = 1$ est vraie.
Hérédité : On fait l'hypothèse que pour un $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n est vraie. Pour $n+1$, il vient :
$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$,
or d'après P_n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
Comme $a > 0$, $(1+a) > 0$, et l'on peut multiplier chaque membre de l'inégalité P_n par $(1+a)$.
$(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na) \times (1+a)$; en développant le second membre :
$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + \underbrace{na + a}_{(n+1)a} + \underbrace{na^2}_{>0} \geqslant 1 + (n+1)a$, d'où :
$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$, i.e. P_{n+1} est vraie.
Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Théorème 3.2 Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Alors la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou non suivant les valeurs de q :

- si $q > 1$, alors (q^n) diverge et $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$;
- si $q = 1$, alors (q^n) converge vers 1 ;
- si $-1 < q < 1$, alors (q^n) converge vers 0 ;
- si $q \leqslant -1$, alors (q^n) diverge et n'a pas de limite

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire**

- si $q > 1$, on peut poser $q = 1 + a$ avec $a > 0$.
  On a alors, d'après la Pté **??**, $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
  Or $(1 + na)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$. Donc d'après le th. **??**, on déduit que la suite de terme général q^n diverge aussi vers $+\infty$.
- si $q = 1$.
  Dans ce cas la suite est stationnaire (constante égale à 1), donc elle converge vers 1.
- si $-1 < q < 1$, on distingue deux cas :
  si $-1 < q < 0$, on pose $q' = -\frac{1}{q}$; si $0 < q < 1$, on pose $q' = \frac{1}{q}$.
  Ainsi, on a $q' > 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty} (q')^n = +\infty$.
  Finalement, $q^n = \frac{\pm 1}{(q')^n}$, donc d'après le paragraphe **??**, on a : $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$, alors les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs et deviennent de plus en plus grands en valeur absolue (voir le premier point de cette démonstration), donc la suite (q^n) n'a pas de limite.

Dans le cas d'une raison q négative, on pourra, si l'on veut faire une étude plus détaillée, considérer séparément la suite des termes d'indice pairs, et la suite des termes d'indice impairs. On parle alors de "sous-suites".

D. Théorème des gendarmes

Théorème 3.3 (des gendarmes) Soient u, v et w trois suites numériques telles que :

- à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- les suites u et w convergent toutes les deux vers une même limite ℓ.

Alors la suite v est convergente et sa limite est aussi ℓ.

Démonstration Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. On a :

- la suite u converge vers ℓ, donc il existe un rang p à partir duquel tous les termes de (u) sont dans I.
- la suite w converge vers ℓ, donc il existe un rang p' à partir duquel tous les termes de (w) sont dans I.
- d'après la première hypothèse il existe un rang q à partir duquel les termes des suites u, v et w vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n$

Soit r la plus grande des valeurs parmi p, p', et q (on note $r = max(p, p', q)$). On a alors :

- tous les termes de u de rang supérieur à r sont dans I
- tous les termes de w de rang supérieur à r sont dans I
- tous les termes de rang $n \geqslant r$ vérifient $underbraceu_{n\in I} \leq v_n \leq nderbracew_{n\in I}$, donc $v_n \in I$

En effet, si $I =]a; b[$, on a $a < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < b$, donc $v_n \in]a; b[= I$.
Donc à partir du rang r tous les termes de la suite v sont dans I et comme l'on peut prendre I "aussi petit que l'on veut autour de ℓ", la suite v converge vers ℓ

Exemple 3.10 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{5+cos(n)}{n}$ pour $n > 0$. Montrer que la suite u est convergente vers 0.
Pour tout $\mathbb{N}^*$, on a $-1 \leqslant cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, $4 \leqslant 5 + cos(n) \leqslant 6$.
En divisant par $n > 0$ on obtient : pour tout $\mathbb{N}^*$, $\frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{6}{n}$.
On considère les suites a et b définies pour tout $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \frac{4}{n}$ et $b_n = \frac{6}{n}$. On a donc, pour tout $\mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. Les suites a et b convergent vers 0.
En appliquant le théorème des gendarmes, on obtient que la suite u converge également vers 0.

Exemple 3.11 La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ est-elle convergente ?

E. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3.4 Soit u une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. Alors :
- la suite u est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$; M est alors appelé un majorant de u ;
- la suite u est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n$; m est alors appelé un minorant de u ;
- la suite u est dite bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque 3.3 Si une suite est majorée par un réel M alors tout réel $M' > M$ est aussi un majorant de u. De méme si u est minorée par m alors tout réel $m' < m$ est aussi un minorant de u.

Exemple 3.12 La suite u définie par $u_n = -n^2 + 10n - 20$ est majorée par 5.
La suite v définie par $v_n = \sin(n^2)$ est bornée par -1 et 1.

Théorème 3.4 Toute suite croissante et non majorée admet pour limite $+\infty$.
Toute suite décroissante et non minorée admet pour limite $-\infty$.

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire** Soit u une suite croissante non majorée.
La suite u n'est pas majorée donc quelque soit le réel $A > 0$ il existe p tel que $u_p > A$. Or la suite u est croissante donc pour tout $n \geq p$ on a $u_n \geq u_p > A$.
Finalement pour tout $A > 0$ il existe un rang (ici p) à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]A\,;+\infty[$; la suite u diverge donc vers $+\infty$.
On montrerait de la même manière le deuxième cas.

Théorème 3.5 Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.

Axiome (de la borne supérieure) : si l'ensemble des majorants d'une suite n'est pas vide, il admet un plus petit élément ; c'est-à-dire que si u est majorée, il existe un majorant de u plus petit que tous les autres.

Démonstration du théorème **??** Soit u une suite croissante majorée par M. Il existe alors un majorant A plus petit que tous les autres (d'après l'axiome précédent).
Soit ϵ un réel strictement positif et I l'intervalle $]A-\epsilon\,; A+\epsilon[$. Cet intervalle I contient au moins un terme u_p de la suite u. En effet sinon $A-\epsilon$ serait un majorant de u plus petit que A ce qui contredit la définition de A.
De plus, la suite u est croissante donc pour tout $n \geq p$, on a $u_n \geq u_p > A - \epsilon$. Ainsi, quel que soit l'intervalle I ouvert contenant A, tous les termes de la suite u sont dans I à partir d'un certain rang (ici c'est le rang p) donc la suite u converge vers A.

Remarque 3.4 Attention, le théorème **??** permet de prouver qu'une suite converge mais il ne permet pas de déterminer sa limite.

Exemple 3.13 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.
Montrons que pour $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$:
On a : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$.
Or $k-1 < k$ donc $\frac{1}{k-1} > \frac{1}{k}$ (car $k > 0$) et donc en multipliant par $\frac{1}{k}$, on obtient : $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
En additionnant membre à membre les inégalités obtenues en remplaçant k par 1, 2, ... n, on obtient :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Ainsi, la suite u est croissante et majorée par 2 donc elle converge, mais on ne connaît pas sa limite (ce n'est pas nécessairement 2). En fait on pourrait prouver que la limite de u est $\frac{\pi^2}{6}$.
Ce résultat est dû à Euler.

Théorème 3.6 Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Remarque 3.5 Ce théorème peut aussi s'énoncer : "Toute suite croissante et convergente est majorée par sa limite".

Remarque 3.6 Ce théorème a évidemment un pendant pour les suites décroissantes : "Si une suite est décroissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à ℓ."

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une terme u_p de la suite tel que $u_p > \ell$.
Comme la suite est croissante, on a : $\forall n \geqslant p,\ u_n \geqslant u_p$.
Comme $u_p > \ell$, il existe un nombre m compris entre u_p et ℓ (on peut pour se convaincre de cette existence prendre $m = \frac{u_p+\ell}{2}$).
On a $\ell < m < u_p$, et on considère l'intervalle centré en ℓ suivant : $I =]2\ell - m; m[$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)\ell$, donc tout intervalle centré en ℓ (i.e. tout "tunnel autour de ℓ") contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
En particulier, l'intervalle I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Or on a vu que $\forall n \geqslant p,\ u_n \geqslant u_p > m$, donc à partir du rang p les termes de la suite ne sont pas dans l'intervalle I.
On aboutit à une contradiction, donc notre hypothèse de départ, "il existe une terme u_p de la suite tel que $u_p > \ell$" est fausse.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.